Marius Burtea **Georgeta Burtea**
Mihaela Alexa, Lidia Aruncutean, Claudia Băcanu, Anca Ciobotaru, Oana Constandache, Corina Diaconu, Adriana Dulgheru, Adriana Dumbravă, Georgiana Dumitru, Mădălina Enache, Roxana Iojea, Elena Jinga, Cristina Lemnaru, Corina Marin, Veronica Marin, Luminița Moise, Mihaela Nascu, Gabriel Necula, Viorica Negrea, Daniela Nistor, Silviana Oprea, Diana Oprescu, Ionela Nineta Oprescu, Alina Pleșa, Mihai Popeangă, Gabriela Stroe, Constantin Soare

CLASA a IX-a

MATEMATICĂ

Probleme și exerciții
Teste

semestrul I

- mulţimi şi elemente de logică matematică
- şiruri
- funcţii. lecturi grafice
- vectori în plan
- coliniaritate, concurenţă, paralelism

servicii, resurse, tehnic

CAMPION

CUPRINS

Capitolul

I MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULŢIMEA NUMERELOR REALE

1.1 OPERAŢII CU NUMERE REALE. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Breviar teoretic

1. **Adunarea**: este operaţia care asociază la fiecare pereche (x,y) de numere reale, numărul real $x+y$ numit suma lui x cu y.

Pentru orice numere reale a,b,c au loc proprietăţile:

a) $a+b=b+a$ (*comutativitatea*)

b) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*asociativitatea*)

c) $a+0=0+a=a$ (0 este *element neutru* la adunare)

d) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (orice număr real a are un opus, notat $-a$)

2. **Înmulţirea**: este operaţia care asociază la orice pereche (x,y) de numere reale, numărul xy numit produsul lui x cu y.

Pentru orice numere reale x,y,z au loc proprietăţile:

a) $x\cdot y=y\cdot x$ (*comutativitatea*)

b) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (*asociativitatea*)

c) $x\cdot 1=1\cdot x=x$ (1 este *element neutru* la înmulţire)

d) $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1,\ x\neq 0$ (orice număr real nenul x, are un invers notat $\frac{1}{x}$)

e) $x\cdot(y+z)=xy+xz$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare)

- **Diferenţa** numerelor x,y este numărul $x-y$ cu proprietatea că $x-y=x+(-y)$.
- Dacă $x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0,$ se defineşte *câtul* numerelor x şi y, notat $\frac{x}{y}$ sau $x:y$, cu proprietatea că $\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$.

3. **Puterea cu exponent întreg.**

- Dacă $a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a^n=\underbrace{a...a}_{n\ ori};\ a^0=1.$
- Dacă $a\in\mathbb{R}^*$ şi $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$
- Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $m,n\in\mathbb{Z},$ atunci au loc proprietăţile:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ b) $a^m : a^n = a^{m-n}$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},\ b \neq 0$

c) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ d) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

4. **Rădăcina pătrată** a unui număr real pozitiv x este numărul real pozitiv, notat $\sqrt{x}$, al cărui pătrat este notat cu x.

- Reguli de calcul cu radicali. Fie $a, b \in (0, +\infty)$

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ c) $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$

d) $c\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{c^2 x}, c \geq 0, x \geq 0 \\ -\sqrt{c^2 x}, c < 0, x \geq 0 \end{cases}$ e) $\sqrt{x^2} = |x|$ f) $\sqrt{0} = 0.$

5. **Ordonarea numerelor reale**

- a este *mai mic* ca $b\,(a < b)$ dacă pe axa numerelor punctul $A(a)$ este la stânga punctului $B(b)$.
- a este *mai mic sau egal* cu $b\,(a \leq b)$ dacă $a < b$ sau $a = b$.
- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$ (legea de trihotomie).
- Proprietăţi ale relaţiei '$\leq$' (relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$)

a) Reflexivitatea: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
b) Antisimetria: $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$.
c) Tranzitivitatea: $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$.

- Alte proprietăţi:

e) $a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + x,\ \forall a, b, x \in \mathbb{R}$ f) $a \leq b \Rightarrow ax \leq bx,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ x \geq 0$
g) $a \leq b,\ x < 0 \Rightarrow ax \geq bx$ h) $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$
i) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},\ \forall a, b \in (0, \infty)$ (inegalitatea mediilor)

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$. b) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{14}{11} : \frac{33}{484} - (-2)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{4}{9}$.

a) Se aduce la acelaşi numitor în paranteză şi se introduce întregul în fracţie. Se obţine succesiv: $\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \left(\frac{7}{48} + \frac{26}{48} - \frac{36}{48}\right) \cdot \frac{32}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-3}{48} \cdot \frac{32}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{10} =$
$= -\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-4-1}{10} = -\frac{1}{2}$.

b) Avem succesiv: $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{14}{11} \cdot \frac{484}{33} - (-8) - \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{44}{3} + 8 - 1 = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} + 7 =$
$= -8 + 7 = -1$.

2. Să se efectueze:

a) $4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^7\cdot16^5$. b) $\frac{\left(4^2\right)^{-3}}{3^2}\cdot\frac{\left(2^3\right)^7}{6^2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^7$.

Folosim operaţiile cu puteri cu aceeaşi bază.

a)

$$4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^7\cdot16^5=\left(2^2\right)^2\cdot\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{\left(2^3\right)^7}\cdot\left(2^4\right)^5=2^4\cdot\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{2^{21}}\cdot2^{20}=\frac{2^4\cdot2^{20}}{2^9\cdot2^{21}}=\frac{2^{24}}{2^{30}}=2^{24-30}=$$

$$=2^{-6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.$$

b) Avem succesiv: $\frac{4^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{(3\cdot2)^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{\left(2^2\right)^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{3^2\cdot2^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{2^{-12}\cdot2^{21}\cdot3^7}{3^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot2^7}=\frac{2^9\cdot3^7}{2^9\cdot3^4}=\frac{3^7}{3^4}=$

$=3^{7-4}=3^3=27$.

3. Se dau numerele reale: $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $b=\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{12}$ şi $c=3\sqrt{2}$.

Să se calculeze: a) $2a-b$. b) $(2a-b)^2-c^2$.

a) Scriem numărul b mai simplu scoţând factori de sub radical şi obţinem:
$b=2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$. Rezultă că

$$2a-b=2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

b) $(2a-b)^2-c^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=16\cdot3-9\cdot2=48-18=30.$

4. Se dau numerele: $a=\sqrt{5^2-5}-\sqrt{18}$ şi $b=\sqrt{\left(9\cdot4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}$

a) Să se scrie sub formă simplă a şi b.

b) Să se calculeze media aritmetică şi media geometrică a numerelor a şi b.

a) $a=\sqrt{25-5}-\sqrt{18}=\sqrt{20}-\sqrt{18}=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$.

$$b=\sqrt{\left(9\cdot4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot2^{2n+2}:2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot2^{2n+2-2n-1}}+2\sqrt{5}=$$

$$=\sqrt{3^2\cdot2}+2\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}.$$

b) $m_{arit}=\frac{a+b}{2}=\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}.$

$$m_{geom}=\sqrt{ab}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{20-18}=\sqrt{2}.$$

5. Fie a şi b numere reale pozitive. Să se arate că $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Folosim proprietatea că dacă $x,y\in(0,\infty)$ şi $x\le y$ atunci $x^2\le y^2$. Aşadar, ridicăm la pătrat ambii membrii şi obţinem $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

Înmulţim inegalitatea cu 4 şi obţinem: $a^2+b^2+2ab\le2a^2+2b^2$. Trecem toţi termenii în membrul întâi şi obţinem succesiv:

$-a^2+2ab-b^2\le0\Leftrightarrow-\left(a^2-2ab+b^2\right)\le0\Leftrightarrow-(a-b)^2\le0$. Deoarece inegalitatea obţinută este adevărată rezultă că inegalitatea inițială este adevărată.

6. Să se compare numerele $a=\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ şi $b=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2})^2$.

Aducem numerele a şi b la formă mai simplă. Pentru a, amplificăm fracţiile cu expresiile conjugate numitorilor şi obţinem:

$$a=\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-5}+\frac{2+\sqrt{5}}{2^2-5}=\frac{2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}}{2^2-5}=\frac{4}{4-5}=-4.$$

$$b=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2})^2=1^2-(\sqrt{2})^2-2=1-2-2=-3.$$

Aşadar, $a=-4$, $b=-3$ şi $-4<-3$, deci $a<b$.

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Să se calculeze:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right]:13$; b) $[0,1(4)+0,7(5)+0,0(9)]\cdot(2,35\cdot 4-0,8\cdot 5)$.

2. Să se calculeze:

a) $(0,03\cdot 50+0,02\cdot 25-0,04\cdot 75)^2+(-1)^{2009}$; b) $\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right):\sqrt{\frac{169}{36}}\right]^{2010}\cdot\left[(-2)^3\right]^6:\left[(-2)^2\right]^7$.

3. Ştiind că $a=\sqrt{81}+\sqrt{25}$ şi $b=\sqrt{16}+\sqrt{49}$ să se calculeze:

a) $a+b$; b) a^2-b^2; c) a^2+b^2-100.

4. Să se calculeze:

a) $4\sqrt{12}+5\sqrt{27}-6\sqrt{48}+\sqrt{192}-\sqrt{363}$; b) $3\sqrt{32}-4\sqrt{162}+2\sqrt{50}+5\sqrt{72}-\sqrt{578}$.

5. Să se calculeze:

a) $(a+1)^2;(b+2)^2;(2c+3)^2;(\sqrt{2}+1)^2;(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;

b) $(2a-1)^2;(3b-2)^2;(\sqrt{2}c-3)^2;(\sqrt{3}-1)^2;(\sqrt{5}-2)^2$;

c) $(4x-1)(4x+1);(2x-y)(2x+y);(\sqrt{5}x-2y)(\sqrt{5}x+2y);(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$;

6. Să se calculeze:

a) $(x+1)^3;(y-2)^3;(\sqrt{2}-1)^3;(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$;

b) $(3x-1)^3+(3x+1)^3$; c) $(2\sqrt{2}+1)^3-(2\sqrt{2}-1)^3$.

7. Să se descompună în factori:

a) $x^3+1;y^3+8;z^3+27$; c) $8x^3+1;27y^3-64$;

b) $x^3-1;y^3-8;z^3-27$; d) $125x^3+27y^3$.

8. Să se descompună în factori:

a) $(x+2)^2-(x-1)^2$; c) $9x^2-y^2+6x+1$;

b) $x^2(x+2)^2+4x(x+2)^2+4(x+2)^2$; d) $x^2-y^2-4x+4y$.

9. Să se calculeze:

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2-2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;

c) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}+\sqrt{11+4\sqrt{6}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^2$.

10. Se dă numărul real a cu proprietatea $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$. Să se calculeze:

a) $a^2+\frac{1}{a^2}$; b) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$.

11. Să se compare numerele:

a) $0{,}444$ şi $0,(4)$; b) $\sqrt{13}$ şi $2\sqrt{3}$; c) $5+2\sqrt{6}$ şi 10.

12. Să se ordoneze crescător următoarele numere reale:

a) $-1{,}2;\ -\frac{3}{2};-\sqrt{2};-\sqrt{3};-\frac{8}{5};-\frac{13}{10}$; b) $2\sqrt{3};4;\sqrt{13};3\sqrt{2};3\sqrt{3};2\sqrt{6}$.

13. Să se calculeze media aritmetică, media geometrică şi media armonică a numerelor:

a) $x=2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}-\frac{5}{6}, y=15\frac{1}{4}+6\frac{1}{9}-1\frac{13}{36}$; b) $x=5-2\sqrt{6}, y=5+2\sqrt{6}$.

14. Să se arate că pentru orice numere reale $a,b>0$ au loc inegalităţile:

a) $a^2+b^2\geq 2ab$; c) $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$; e) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$;

b) $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2ab}{a+b}$; d) $a+\frac{1}{a}\geq 2$; f) $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

15. Se consideră mulţimea: $A=\left\{-0,(3);-\sqrt{3};\sqrt{\frac{9}{4}};\sqrt{25};0,5(6);1;4;-6;-\sqrt{49}\right\}$.

Să se determine mulţimile:

a) $A\cap\mathbb{N}$; b) $A\cap\mathbb{Z}$; c) $A\cap\mathbb{Q}$; d) $A\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.

16. Se dau numerele: $a=(0{,}4\cdot 10+0{,}25\cdot 100):29+\left[0,(3)\cdot 18+0,1(2)\cdot 90\right]:17$,

$b=(0{,}2\cdot 5+0{,}02\cdot 100):3+\left(2009^{2009}+2010^{2010}\right)^0+5\cdot 0{,}8:4$. Să se calculeze $(3a-2b+1)^{2009}$.

17. Să se efectueze calculele:

a) $\left(1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}-1\frac{1}{12}\right)^2:\left(4\frac{5}{6}+2\frac{1}{7}-\frac{41}{42}\right)$;

b) $\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\left(-5\frac{1}{5}\right)\right]^4:\left[\left(-2\frac{1}{3}\right):0,(7)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(-1{,}25+\frac{1}{3}\right)\right]^2$.

18. Calculaţi:

a) $\left[\left(2\sqrt{48}+3\sqrt{243}-6\sqrt{147}\right):\left(3\sqrt{27}-4\sqrt{12}+\sqrt{108}\right)\right]^{2009}$;

b) $\left\{\left[(4\sqrt{320}-2\sqrt{125}+3\sqrt{180}):\left(\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{245}\right)\right]^3:\left[\left(8\sqrt{2}\right)^2-3\right]\right\}^3:\left(2^3\right)^5$.

19. Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei:

$E=\frac{2}{3}\cdot(-1)^{n}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^{mn}-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{m+1}$, ştiind că m şi n sunt numere naturale.

20. Să se arate că au loc egalităţile:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=10$; b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=4\sqrt{6}$;

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+1\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)^2=24$.

21. Să se descompună în factori:

a) $x^2-2;4x^2-3;9y^2-5;25z^2-7$; b) $x^2-3y^2;2x^2-5y^2;3a^2-4b^2;16u^2-20v^2$.

22. Să se descompună în factori:

a) $x^2-2\sqrt{2}x-y^2+2$; c) a^3-2a^2-a+2;

b) $3x^2-\left(y-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}x+2$; d) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$.

23. a) Să se scrie două numere raţionale cuprinse între $-3,234$ şi $-3,233$.

b) Să se detemine cel mai mare număr întreg mai mic decât $-2\sqrt{3}$

c) Să se determine numărul natural cuprins între $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{7}-1$.

Aprofundare

24. Se consideră numerele $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât: $4a^2+36b^2-4a-12b+2=0$. Să se calculeze $2a+6b$.

25. Să se calculeze media aritmetică, media geometrică şi media armonică a numerelor reale care verifică egalitatea: $\left(a-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=0$.

26. Să se arate că pentru orice numere $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ au loc inegalităţile:

a) $(a+b)^2\geq 4ab$; c) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$;

b) $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq(ad+bc)^2$; d) $(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

27. a) Să se arate că pentru orice numere $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ au loc inegalităţile:

$\min(a,b)\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq\max(a,b)$ (inegalităţile mediilor).

b) Să se arate că $\sqrt{x}\leq\frac{x+1}{2}, x\in IR_+$.

28. Să se determine numerele reale $a,b>0$, pentru care are loc egalitatea: $\sqrt{8a}+\sqrt{2b}=4a+b+1$.

29. Să se calculeze:

a) $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{6}-5\right)^2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$;

b) $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}+\sqrt{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{3}\right)^2$.

30. Să se determine numerele raţionale a,b astfel încât să aibă loc relaţiile:

a) $(a+1)\sqrt{3}+(2b+3)\sqrt{5}=2\sqrt{3}+5\sqrt{5}$; b) $(2a+b+1)\sqrt{3}+(3a-2b+1)\sqrt{5}=4\sqrt{3}+2\sqrt{5}$.

31. Să se arate că:

a) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, k\in\mathbb{N}^*$; b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{2009\cdot 2010}<1$;

c) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2009^2}<2.$

32. Se consideră expresia: $E(x)=(x+1)^2-(x-1)^2, x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $E(x)=4x, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $E(1)+E(2)+...+E(2009)$.

33. Se consideră expresia: $E(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se determine valorile lui $x\in\mathbb{R}$, pentru care $E(x)$ are sens.

b) Să se arate că $E(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, pentru care $E(x)$ are sens.

c) Să se calculeze suma: $S=\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2}+\frac{2\cdot2+1}{2^2\cdot3^2}+...+\frac{2\cdot2009+1}{2009^2\cdot2010^2}$.

34. Se consideră numerele:

$a=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ şi $b=\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

Să se calculeze media aritmetică, media geometrică şi media armonică a celor două numere.

35. a) Să se dea exemplu de un număr real forma $a+b\sqrt{5}$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi $a^2-5b^2=1$.

b) Să se determine inversul numărului real $9+4\sqrt{5}$.

Dezvoltare

36. Să se determine numerele reale x, y, z ştiind că: $x^2+y^2+z^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{3}y-2\sqrt{5}z+20\le10$.

37. a) **Să se arate că** $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}, x,y\in\mathbb{R}, a,b\in(0,\infty)$;

b) Să se arate că: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}, x,y,z\in\mathbb{R}, a,b,c\in(0,\infty)$;

c) Să se arate că: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}, x,y,z\in(0,\infty)$;

d) Să se arate că $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge9, a,b,c\in(0,\infty)$.

38. a) Să se arate că $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge6, a,b,c\in(0,\infty)$;

b) Să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}, a,b,c\in(0,\infty)$;

c) Să se arate că $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), a,b\in(0,\infty)$;

d) Să se arate că $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), a,b,c\in(0,\infty)$.